あるリスク評価関数の分析

飯　尾　　要

Ⅰ. はじめに
Ⅱ. 説　明
Ⅲ. 設　定
Ⅳ. 分　析
Ⅴ. 構　成
Ⅵ. 補　説

Ⅰ. は　じ　め　に

筆者はさきに，市場における情報活動費用についての分析を行なった。その際，ある不確実性のもとにおける企業者のデシジョンに関して，その期待収益とその偏差のあり方への思惑の両方によって規定される，ある種の評価関数があることを述べ，それを手がかりとして分析を展開した。〔**5**, pp. 40〜47 ; **6**, 第7章〕。そこにしめされた評価関数は，オスカー・ランゲ (Oskar Lange) が，先物価格およびイノヴェイションにかかわる行動決定の問題に使用したモデルであり，ランゲの呼称に沿うよび方で名づければ，**リスク評価関数** (risk premium function) ともよび得るものである。ランゲ自身も指摘しているように，この関数は，ある不確実性状況のもとにおける〝大多数のビジネス・プラニング〟に結びつけて論じられる一般的性格をもっている。〔**3**, pp. 19〜25 ; **4**, p. 19, pp. 29〜33.〕

筆者が，さきに，このモデルを使用した際には，展開が煩瑣なものになることを避けるため，その関数の形状をある一定の条件をみたす任意の曲線で図示して分析を行なったが，その際問題となった分析のためにはそれ

で充分であった。ランゲがそれを使用した際にも同様のことがいえる。今回は，ひとまず，その際に問題となった分析からは直接には離れて，その種の評価関数の形状についてプラキシオロジカルな観点から，若干の分析をくわしく行なっておきたい。ここでは，なんら特殊な概念や無用な概念を導入する必要なく，**人間の方法論的合理性にもとづく行動の論理により，すなわちランゲのいうプラキシオロジーの法則に立って，この評価関数の形状についてある特性化ができることを検討するのが主眼である***。

* なお，ここで，リスク (risk) について一言しておく。しばしば，確率分布が既知のときにはデシジョン・メーカーはリスクの下におけるデシジョン問題に面し，確率分布が未知のときには不確実性 (uncertainty) の下におけるデシジョン問題に面するといった使い分けがみられる。これは，おそらくナイト (F. H. Knight) の用法などから発したものと思われる。しかし，この用法は，のちにも参照するボーチ (K. H. Borch) もいうように「理論的にも実際的にもなんら有用な目的に役立つことはない」。〔2, p. 77 ; **2 a**〕。筆者はこの用法をとらない。ランゲもこれを使用しない。ただ，確率過程における制御デシジョンの問題として，確率分布が既知のときのデシジョン問題と，確率分布が未知の部分をもつときのデシジョン問題とを分け，後者が適応制御過程 (adaptive control process) として区別されるといった用法は，デシジョン問題に有効である。ただ，確率分布や確率関数が既知のときでも，問題がある種の不確実性の下にあらわれるというのが今日の一般的な用法であるから，上述のナイト流の用法は無用な混乱を生むだけであり，好ましくないだろう。

II. 説　　明

ところで，ここでリスクという場合には，それは，ある期待値にたいする各確率変数のとり得る値のバラつきの度合のようなものでしめされるものである。それは，デシジョン・メーカーがあたえられた状況でのある確率変数について，その確率分布を既知であろうと，あるいはそうでなくてその確率変数についてある一定の主観的確率分布を付する場合であろうと，いずれの場合にも問題となり得るものとして現われる。このような意味あいでのリスクが問題となるかどうかは，デシジョン・メーカーがその

確率変数の分布について既知であるか未知であるかということに直接に依存するのではなくて，決定しようとする問題の性質が反復試行を許すようなものであるかどうかに依存しているといってよいだろう。

すなわち，あるデシジョン・メーカーにとっていくつかの行動プログラム案があり，それぞれが一定の目標達成度をしめす可測的な量的尺度をもっているとする。それらプログラム案をある不確実性をともなった環境のもとで実施するとして，それぞれのプログラムがかれにもたらすと考えられる目標達成度はある種の確率分布をともなった確率変数として現われると考えざるを得ない。いくつかの行動プログラム案から1つを選択する際，かれの行なおうとする行動プログラムについてのかなりの反復試行回数やかなりの行動期間が考えられる状況ならば，かれは行動結果の統計学的期待値のみを考慮に入れて問題を決定することができよう。(われわれがここで，目標基準というとき，すでに費用をさし引いた成果基準，すなわち最適問題における performance criterion としての目標関数のようなものを語っているととってほしい)。もし，問題が上述のようでない場合には，デシジョン・メーカーにとっては，偏差のあり方や確率分布の形状そのものがかなり問題になり得るだろう。ランゲのいうリスク評価関数はこういった場合にあたるものとして現われている。

いま，ある企業者が，それぞれに，ある収益値をもたらすいくつかの行動プログラム案をもつとする。状況にかかわる確率変数について確率が充分に可測的でありまた全確率分布にかかわる正確な知識をもち得るか，または主観的確率分布を付する場合でもそれを上述の形で精密にもち得れば，あり得べき収益値のとり得る値の集合は，ある形状の分布における期待値と標準偏差などで特性づけられるだろう。しかし，ランゲが分析に使用した際にも，また筆者が分析に使用した際にも，その分析目的にとっては，企業者はその確率分布について次の2つの特性にのみ注意すると仮定すれば充分であったし，以降の展開もこれにもとづくものである。すなわ

ち，企業者はつぎの2つの特性にのみ注目する。

(1) もっとも確からしい収益値。いわゆる並数 (mode) である。

(2) あり得べき収益値の分布における範囲 (range)。

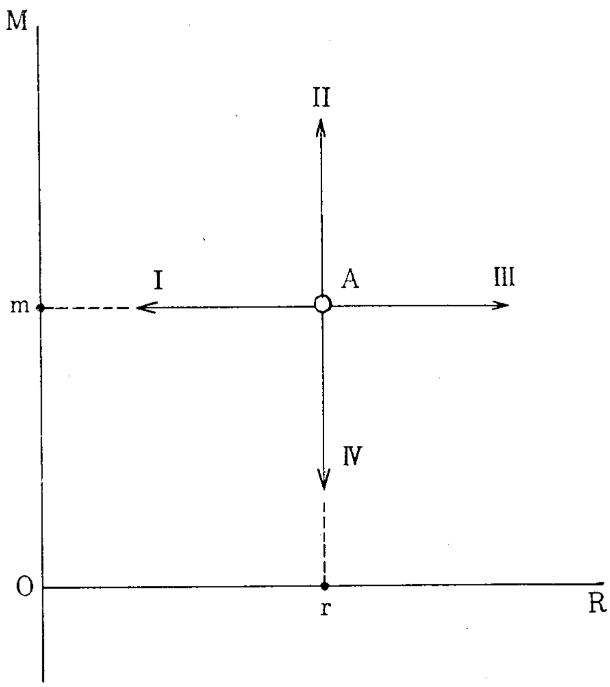
なお，後者については，その確率が非常に低く思われるような，分布の両裾にあたる値は切り捨てられ，一定の確率以上の確率を付されるような収益値だけを問題として，実用上の範囲をとるとしよう。これはいわゆる一定の有意水準に相応する信頼区間に類似するものである。また確率分布はほぼ対称的であると考えられているとしよう。つまり並数は同時にほぼ中位値であるという形になる。ある企業者は，あるプログラムの収益予想を考える際に，〝おそらく100万円であることがもっとも確からしいけれども，まずまずそれは80万円以下にはならないだろうし，また120万円以上にもならないだろう〟，といった風に考える。これが上述の設定である。この設定は，ランゲもいうように，〝かなり現実的なもの〟といえよう。そして上述の例でいうと，もっとも確からしい値100万円にたいして，120−80＝40万円の範囲またはその半分の20万円が，「その期待についての不確実性の度合 (the degree of uncertainty of the expectation」(O. ランゲ) をしめすものとしてあらわれる。これが，ここにいうリスクにあたるものである。企業者は，ある最も確からしい収益値については，ヨリ小さい分布の範囲がともなうことを望むだろうし，また，ある分布の範囲については，最も確からしい収益値がヨリ大きいことを望むだろう。すなわち，企業者は不確実性の度合についての減少のために，最も確からしい収益値の減少で〝支払う (pay)〟用意がある，といえよう。すなわち〝最も確からしい期待収益値と，……あり得べき収益値の確率分布の範囲との間に，無差別図表が描ける〟のである*。〔**3**, pp. 19～20.〕

* なお，ランゲは，そこでは，receipts (収入) について述べている。ランゲは将来費用のカーヴも同様の形で——すなわちrangeをしめした軸に平行な軸を中心に反転したような形で——描き，予想収益との関係で論ずる。筆者がさき

に行なった分析では，将来費用予想の問題は捨象して，現実費用のみで扱った。分析目的にとってはそれで足りた。また，ここでも，カーヴの形状のみを問題とする上では，問題を簡単化し，収益 (profit) のカーヴで扱おう。収入の予想カーヴ，費用のカーヴであろうと，その形状の一般論及についてはほぼ変りはない。

Ⅲ. 設　　定

いま，この無差別図表について，ランゲがしめしたより，やや詳細にみてゆこう。



第 1 図

第 1 図のように，OM 軸に，最も確からしい収益値(モードとしての値) m をとる。OR 軸に，分布の範囲の片側の長さ r をとる。(分布は対称的と設定されている)。単位はいずれもある貨幣単位額とする。A 点は，〝最低 $m-r$，最高 $m+r$，もっともありそうな値 m〞というプログラムをしめす。以下，$m-r$ を下限，$m+r$ を上限とよぶ。表記法として，

$$A \cdots\cdots (m-r,\ m,\ m+r) \qquad (r \geqq 0)$$

でしめす。

このような形でしめされたあるプログラムXの方がある別のプログラムYより選好されれれば，

$$\Phi(X) \gg \Phi(Y)$$

でしめし，両者がもし等しく選好されるなら，

$$\Phi(X) \equiv \Phi(Y)$$

でしめすことにしよう。

また，もし，

$$\Phi(A) \gg \Phi(B) \gg \Phi(C) \gg \cdots\cdots$$

としめしたときには，A, B, C の順に，つまり，AはBより，BはCよりそしてAはCより，……という形で推移律が成立する形で，順次に選好されることをしめすものとしよう。

上の表記および説明には，上述で説明した以上のなにの意味をもたせる必要もない。

第1図の Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ の各半直線上の任意の各点は，Δm, Δr を任意の正数として，

I $\cdots\cdots(m-r+\Delta r,\ m,\ m+r-\Delta r)$

II $\cdots\cdots(m-r+\Delta m,\ m+\Delta m,\ m+r+\Delta m)$

III $\cdots\cdots(m-r-\Delta r,\ m,\ m+r+\Delta r)$

IV $\cdots\cdots(m-r-\Delta m,\ m-\Delta m,\ m+r-\Delta m)$

上からわかるように，

$$(3.1)\qquad \Phi(\mathrm{IV}) \ll \Phi(A) \ll \Phi(\mathrm{II})$$

は当然である。なぜなら，Ⅱ，A，Ⅳ の順に，下限，モード，上限ともいずれも大きいからである。

また，($\geqq$を，"$\gg$または$\equiv$"，の記号として)，(ただし，ここだけ)，

$$\Phi(\mathrm{I}) \leqq \Phi(A) \leqq \Phi(\mathrm{III})$$

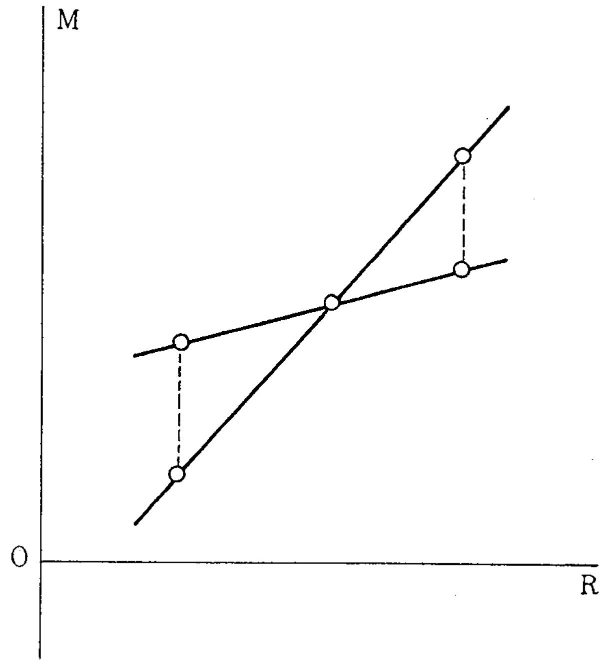
といったあり方は，同じモードにたいして，ただ下限と上限とが少ない方

と多い方へ等しく拡大してゆくような事態を，等しく選好するか，またはヨリ選好するということである。具体的にいうと，(10, 10, 10)のかわりに，(—10, 10, 20)を，また(—110, 10, 130)を，等しく選好するか，または後者をヨリ選好するということである。これは，かなり gambler 的であるということになる。いま，そのような，かなりに強く gambler 的であるケースを除いて，ごく一般的な企業者デシジョンという限定に立てば，

(3.2)　　$\Phi(\mathrm{III}) \leqslant \Phi(A) \leqslant \Phi \leqslant (\mathrm{I})$

になる。(左へ移るほど順次に好ましいということ。)

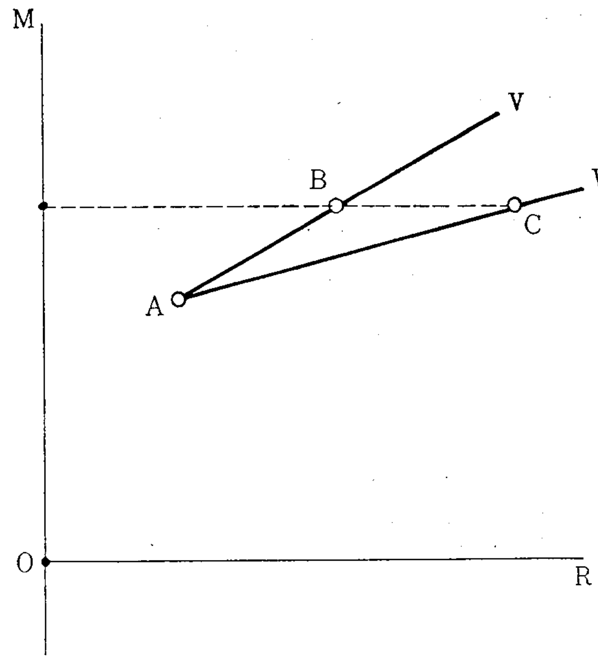
いいかえると，われわれは，(3.1)，(3.2)の条件の下での無差別図表をあつかう。両条件からは，無差別図表は，すべての点において右上りの曲線または直線になる。



第 2 図

また，上の2つの条件のもとでは，**第2図**のようになることはない。つまり，無差別曲線がまじわることはない。

無差別曲線(または直線)は，半直線IIとIIIとの間に向う。**第3図**半直線



第 3 図

VIのように，半直線Vに比べて，その方向がIIIに近いということは，

$$\Phi(A) \equiv \Phi(C) \ll \Phi(B)$$

であり，他方，Vの場合は，

$$\Phi(C) \ll \Phi(B) \equiv \Phi(A)$$

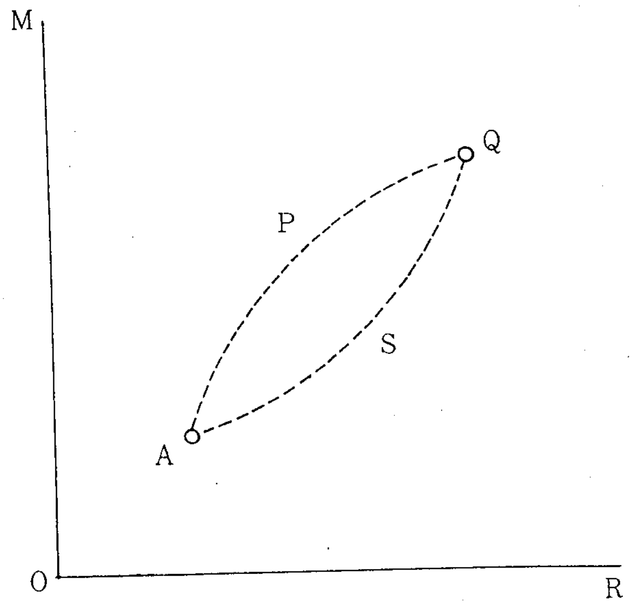
である。

Bは，Cに比べて，同じモードに対してrが小さく，したがって下限はヨリ大きく，上限はヨリ小さい。Cは，Bに比べて，同じモードに対して，下限はヨリ小さく，上限はヨリ大きい。したがって，半直線VIのようにIIIに近いことは，ヨリ gambler 的なヨリ risk-taking 的な選好の様式をしめすことになる。反対にVのようにIIに近いことは，ヨリ慎重であるということになる。

ところで，この無差別図表が曲線であるときには，下方に対して凸であるか，凹であるか。

第 4 図における APQ の経路で曲線が存在するとすれば，モードや範囲の絶対値の小さいところではヨリ慎重であり，モードや範囲の絶対値のヨ

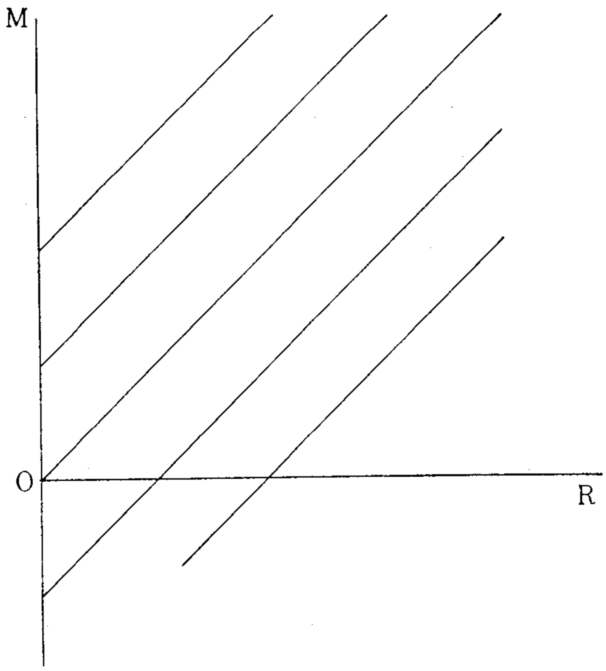
り大きいところではヨリ risk-taking 的になるということになる。これはごく一般的な考え方からいって妥当ではない。なぜなら，このようなことを一般的にみとめれば，われわれが目盛りについてなんら限定条件を付さない以上―〝一般的に〟ということはそれを付さないということであるから，モードや範囲が10円台，100円台のときにはきわめて慎重なデシジョンをとり(つまり下限の減少を大いに気にするのに)，反対にモードや範囲が1000円台，1万円台に上るにつれて，あるいは100万円台に上るにつれて，さらに，gambler 的になる（つまり，下限の減少を気にするよりは，上限の増大を求めることになる）ということを意味するようになってしまうからである。これは，gambler のあり方としても奇妙なものであるが，まして，われわれの設定条件である，ごく一般的な企業者デシジョンからいっても妥当ではない。したがって，曲線の経路は ASQ のようになる。無差別図表が曲線の場合には，それは下方に対して凸である。



第 4 図

ただ，つぎのことに留意しておこう。もし，デシジョン・メーカーが最慎重派であればどうなるか。かれは，下限のみに注目するだろう。つま

り，いかにモードや上限が増大しようとも，下限の等しいプログラムはすべて無差別になる。この場合，無差別図表は，**第 5 図**のようになる。各半直線は，45°線であり，この上では $\Delta m/\Delta r=1$ である。したがって，別のいい方をすると，無差別図表上の曲線または直線の勾配は，この 45° 線よりも急傾斜にならないということである。



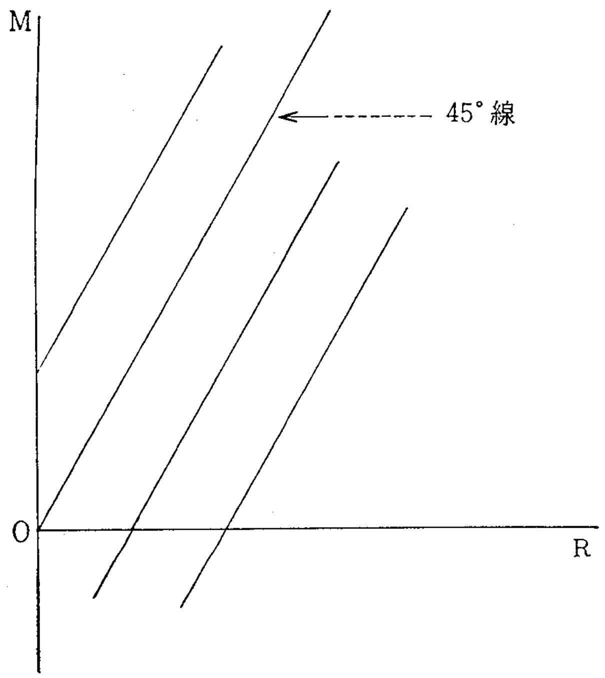
第 5 図

45°線上では $\Delta m=\Delta r$ である。もし，無差別線が 45° 線より急傾斜になるということは上述の点をヨリ選好しないし等置もしないということであるから，($\Delta m=\Delta r$ として)，

$$\Phi(m-r,\ m,\ m+r)\geqslant\Phi(m-r,\ m+\Delta m,\ m+r+2\Delta m)$$

ということを意味する。一般的にいってこのようなデシジョンが成立するとみるのはかなり奇妙なことになる。

ただ，作図上，R の目盛りと M の目盛りを変えて，**第 6 図**のようになることは充分にあり得る。



第 6 図

IV. 分　　析

さて，上述のような条件をみたす曲線を，**なんらかの合理性をもった**具体的な形状の関数として設定することができるだろうか*。

なお，設定された単位の下に端数はなく，図表は離散形であると考えられるが，のちでは連続関数として扱い，それらが，m, r について整数値をとる点を通過する際に有効であると考えよう。

ここで，ボーチが Bernoulli 分布を使用して展開した若干の数学的操作にヒントを得ながら，問題を展開してみよう。〔**2**, pp. 23～33, 34～41 ; **2**,〕

ただ，われわれにとっては，ボーチがそこで使った数学的方法以外の付加的説明，たとえば基数効用の概念や効用一般についての説明などはなんら必要でも有用でもない。

そのほか，以降におけるわれわれの説明は，ボーチのそれとはかなりに異なっている。

* いうまでもなく，単に第Ⅲ節の設定をみたす曲線の形状を恣意に設定するなら，われわれは，

$$\Phi(m-r, m, m+r)\equiv\Phi(m_i, m_i, m_i)$$

の曲線として，

$$m=ar^2+m_i\ ,\quad (\text{ただし } m_i \text{ は定数})。$$

を設定し，(のちに述べる表現でいうと，$\bar{\varphi}=m-ar^2$; $m_i=\bar{\varphi}$)

$$r=\frac{1}{2a}$$

で，45° 線になるような無差別図表を考え，これが a をパラメーターとして変化すると考えてもよいだろう。しかし，このような曲線はなんの根拠も合理性もない。また，上述の場合，各無差別曲線について，m の値如何にかかわりなく dm/dr が等しいということも，一見考えられるほどには合理的ではない。本稿第Ⅵ節の終りの方参照。いずれにせよ，われわれは，なにかの合理性に裏づけられた曲線を求めるのである。

いまいくつかの行動プログラムについて，それぞれ不確実性をともなう形で収益値の状態がある。それぞれのプログラムについて，そのあり得る収益値たる確率変数 x について，確率分布 $f_j(x)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ があることになる。なお，$0<n<\infty$ としよう。さしあたり離散分布で考え，

$$x=\{x_i\} \qquad 0\leqq x_i<\infty$$

$$\sum_i f_j(x_i)=1 \qquad (j=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

いま，デシジョン・メーカーにとっては，その最終的な収益のみが問題であり，同じ $f_j(x)$ でしめされるプログラムについては等しく選好されるとし，それをプログラム A_j で代表させる。

いまもし，確実な収益値 x_m^0 をもたらす（つまり確率１で x_m^0 をもたらす）プログラム A_m^0 と，確実な収益値 x_n^0 をもたらす（つまり確率１で x_n^0 をもたらす）プログラム A_n^0 とがあり，

$$x_m^0>x_n^0$$

ならば，当然に，

$$(4.0) \qquad \Phi(A_m^0)\geqq\Phi(A_n^0)$$

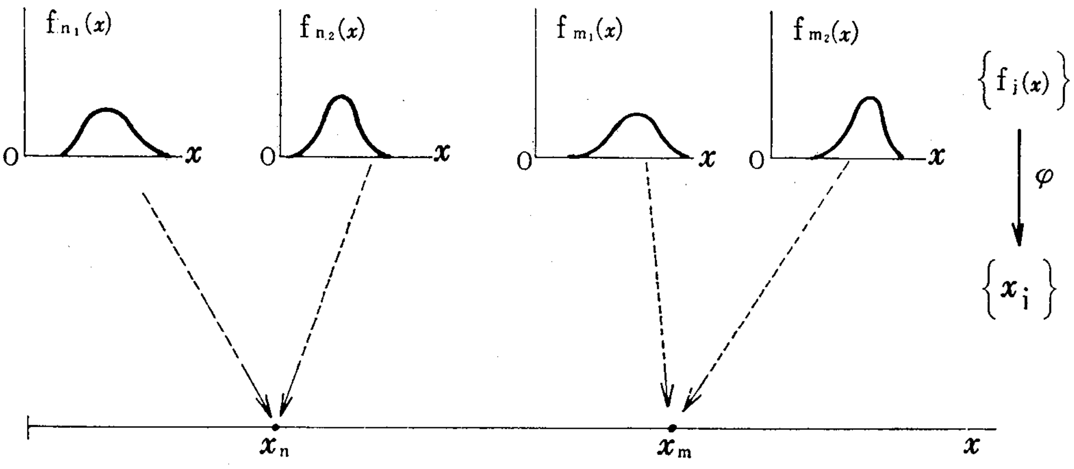
である。

また，いま $f_j(x)$ をもつプログラムを，確実な収益 x_j をもたらすプログラムと等しく選好させるような関係があれば，同じ $f_j(x)$ をもつプログラムが異なった確実な収益値 x_j と x_i $(i \neq j)$ に関係づけられるようなことはないだろう。(もし，そのようなことがあれば上述の例で $\Phi(A_m^0) \equiv \Phi(A_n^0)$ になってしまう。)

したがって，いま，各 $f_j(x)$ をもつプログラムの集合 $A_0, A_1, \cdots\cdots, A_n$ をそれぞれ確実な収益 $1, 2, \cdots\cdots, x_i, \cdots\cdots$ をもたらす各プログラムと等しく選好させるような一定のデシジョン・ルールが合理的な形で存在すれば，$f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), \cdots\cdots$ のプログラムは同じ x_m に，$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \cdots\cdots$ のプログラムは同じ x_n につながる形で，プログラム集合は，実数の集合 $1, 2, \cdots\cdots, x_i$ の上に，順序づけられた集合として写像されることになる。その汎関数を φ であらわせば，

(4.1)　$\varphi[f_j(x)] = x_j$

でしめされる。(多対1的な変換)。(**第7図**参照)。



第 7 図

このような φ はどのようにして，合理的ルールとして可能か。

いま，まず $(1, x)$ で二項分布 $\begin{pmatrix} 1 \cdots\cdots x \\ 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$ をしめす。(確率1で値 x，確率0で値ゼロ)。

当然に，

(4.2)　$\varphi[(1, x_i)]=x_i$

この場合，φ は1対1射像である。

いま，ある一定量 Q をおく。そして，二項分布 (p, Q) をおく。ただし，$0\leqq p\leqq 1$。この (p, Q) に，上述の φ なる変換を，1対1でほどこすことは可能である*。

(4.3)　$\varphi[(p, Q)]=x_{pQ}$

また，この場合には，逆変換も一義的に可能であり，ある x_i について，

(4.4)　$\varphi[(p_{x_i}, Q)]=x_i$

なる p_{x_i} が存在する。

* もし，$p_i>p_j$ なら

$$\Phi(p_i, Q)\gg\Phi(p_j, Q)$$

であり，p_i にはヨリ大きい値の x_{p_iQ} が，p_j にはヨリ小さい値の x_{p_jQ} がリンクする。

いいかえると，

$$(1, x_i)\sim(p_{x_i}, Q)$$

ただし，$\sim$ は等置されるということ。そして，x_i が0から Q へと増大するにつれて，p_{x_i} は0から1へと増大するわけである。つまり，$p_0=0$, $p_Q=1$, $0\leqq p_{x_i}\leqq 1$ そして，$0\leqq x_i\leqq Q$.

(4.4)をみよう。不確実性 p_{x_i} での収益値 Q は，確実な収益 x_i に等置される。

つまり，p_{x_i} に依存して，Q の評価は，$(Q-x_i)$ だけ減価する形をとる。逆にいうと，確実な収益 x_i と等置される収益を，不確実性 p_{x_i} のもとで求めるなら，$(Q-x_i)$ だけの**プレミアム** (**premium**) がつくということである。

この φ のあり方は，デシジョン・メーカーが慎重であるか，risk-taking 的であるかで異なることになる。

ところで，一般的な(4.1)を(4.4)の形にもちきたせるか。

いま，$f_j(x)$ は，$0 \leqq x \leqq Q$ で規定されるとしよう。Qはある一定数である。Qをかなり大きくとれば一般的にも問題はない。

$$f_j(x)=[p_j(0), p_j(1), \cdots\cdots, p_j(x_i), \cdots\cdots, p_j(Q)]$$

ただし，$p_j(x)$ は，$f_j(x)$ のもとで，収益値 x が得られる確率．$0 \leqq x \leqq Q$。

ある φ をもつデシジョン・メーカーにとっては，確実な収益 x_i をもたらすプログラムは (p_{x_i}, Q) なるプログラムと等置されるから，上の $p_j(x)$ における x のかわりに (p_x, Q) を考えると，$p_j(x)$ なる状態は，この人にとっては，

$$\begin{pmatrix} p_j(x)\cdot p_x \cdots\cdots\cdots\cdots Q \\ p_j(x)\cdot(1-p_x)\cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$$

なる二項分布と同値である。

このことを $0 \leqq x \leqq Q$ の範囲での x のすべての値に適用すると，$f_j(x)$ は，つぎの P_j をもつ (P_j, Q) に等置されることになる。

(4.5) $\quad P_j=\sum_{x=0}^{Q} p_j(x)\cdot p_x$

そして，

(4.6) $\quad \varphi[f_j(x)]=\varphi[(P_j, Q)]=\chi_{P_jQ}$

すなわち，(4.4) の φ があれば，そしてこれはすでにみたようにあり得るが，$f_j(x)$ を一定の順序づけられた実数の集合に変換することはできる。Q が定められていれば，あたえられた $f_j(x)$ について χ_{P_jQ} は一義的に決定される。

どのような形の φ にせよ，P_j の 0 から 1 への移動につれて，χ_{P_jQ} の 0 から Q への移動が対応する。そして，P_j のヨリ大きい値には χ_{P_jQ} のヨリ大きい値が対応する。

したがって，χ_{P_jQ} のかわりに，$k\cdot P_j$ を，$f_j(x)$ の選好される順序をしめすものとして使用することができる。この序数への変換を $\bar{\varphi}$ としよう。

$$\bar{\varphi}[f_j(x)]=k\cdot P_j=\sum_{x=0}^{Q} k\cdot p_j(x)\cdot p_x. \quad \text{(ただし } k \text{ は任意定数)。}$$

この $k\cdot p_x$ を $\alpha(x)$ でしめせば，

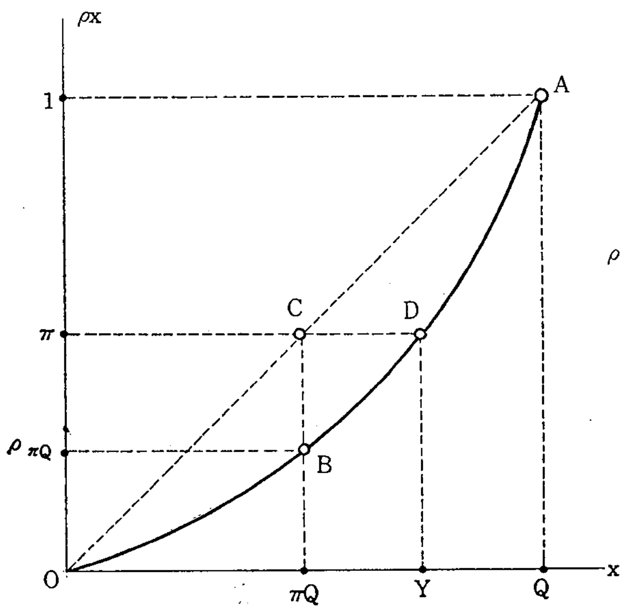
(4.7) $\overline{\varphi}[f_i(x)]=\sum_{x=0}^{Q}\alpha(x)p_j(x)$

ここで $\alpha(x)$ はつぎにしめす3つの条件をみたす関数である。

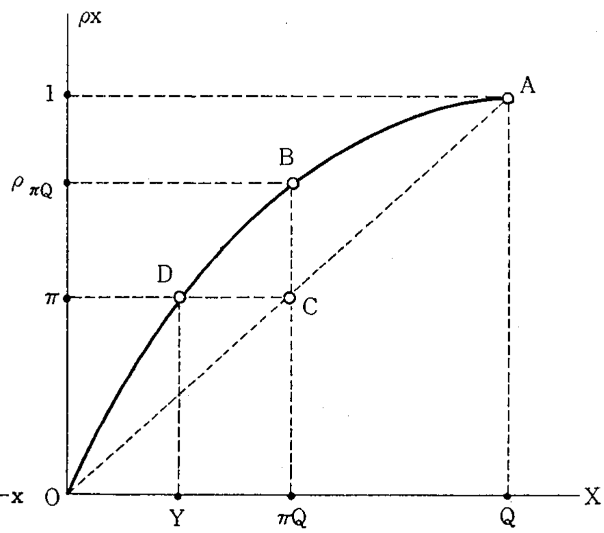
1. $\frac{d}{dx}\alpha(x)>0$ で，$0\leqq x\leqq Q$ の上で規定される。

2. $0\leqq\frac{1}{k}\cdot\alpha(x)\leqq 1$ で，$\frac{1}{k}\alpha(x)$ は，確実性のもとでの x は，Q についての (p_x, Q) と同置される，その p_x である。

さらに，この p_x の，したがって，$\alpha(x)$ の二次微分は正か，負か。いいかえると，p_x の形状は**第8図**のようになるか，**第9図**のようになるか。



第 8 図



第 9 図

いま任意の，$0<\pi<1$ なる値，π をとる。

B点は，

$$\overline{\varphi}[(p_{\pi Q}, Q)]=\pi Q=\varphi[(1, \pi Q)]$$

をしめしている。

Cは，AOと，Bから Op_x 軸への平行線との交点である。Cの高さ（CからOX軸への距離）は π である。D点は，

$$\varphi[(\pi, Q)]=y$$

をしめしている。

第8図のようになるということは，$y>\pi Q$ であり，

$$\Phi(D)\geqslant\Phi(B)$$

いいかえると，

$$\Phi(\pi, Q)\geqslant\Phi(1, \pi Q)$$

を意味している。

すなわち，確実に入る πQ 円よりも，

$$\begin{pmatrix}\pi \cdots\cdots\cdots\cdots Q \\ 1-\pi \quad \cdots\cdots 0\end{pmatrix}$$

なる二項分布で，期待値 πQ 円の方が選好されることになる。二項分布であるから，上限，モード，下限という形はとらないが，これは，上限が確率 π でM円で，下限ゼロ円にも確率 $(1-\pi)>0$ が付いた期待値 πQ 円なるプログラムが，確率1のもとでの πQ 円なるプログラムよりも選好されるということである。

われわれが，前節Ⅲで設定した条件からはこれは妥当なものとしてとれない。(3.2) を参照せよ。

また，p_x が OA の形で直線になるということは，確実に入る πQ 円と，期待値 πQ 円の不確実なプログラムとが同一視されることであり，（つまりBとDの一致），これも前節の条件設定に一致しない。

したがって，われわれの前節のようなケースに適合するものとしては，p_x は第9図のようにならねばならない。いいかえると，p_x について，したがって $\alpha(x)$ については，第3の条件がつく。

3. $\dfrac{d^2}{dx^2}\alpha(x)<0$

この **1**, **2**, **3** の条件をみたす $\alpha(x)$ はいろいろとあり得るだろう。いまここで，かなり一般的なその1つをとろう。

$$\alpha(x)=x-ax^2$$

ただし，

$$0\leqq x\leqq Q \ , \quad 0<a<\frac{1}{2Q}$$

したがって,

$$x \leqq Q < \frac{1}{2a}$$

これを(4.7)に代入すると,

$$\bar{\varphi}[f_j(x)] = \sum_{x=0}^{Q} (x - ax_2) \cdot p_j(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \bar{\varphi}[f_j(x)] &= \sum_{x=0}^{Q} x \cdot p_j(x) - a \sum_{x=0}^{Q} x^2 \cdot p_j(x) \\ &= \sum_{x=0}^{Q} x \cdot p_j(x) - a[\sum_{x=0}^{Q} x \cdot p_j(x)]^2 \\ &\quad - a \sum_{x=0}^{Q} [x - \sum_{x=0}^{Q} x \cdot p_j(x)]^2 \cdot p_j(x) \end{aligned}$$

すなわち, Eを期待値, Vを分散でしめすと, $(E \geqq 0,\ V \geqq 0)$

(4.8) $\qquad \bar{\varphi}[f_j(x)] = E - aE^2 - aV$

このような$\bar{\varphi}$をもつデシジョン・メーカーにとっては,それぞれのEとVとをもつプログラムについて,そのEとVの値の組が同じ$\bar{\varphi}$をあたえるプログラムは,同じ曲線上にプロットされる形で,各種のプログラムが,$E-V$平面の上に無差別図表の形で描かれることになる*。

* $\alpha(x)$ をもっと一般的にすると, A, B, C を任意の数として, $(A>0)$

$$\alpha(x) = -Ax^2 + Bx + C$$

これを(4.7)に代入して,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \sum_{x=0}^{M} C \cdot p_j(x) + BE - AE^2 - AV \\ &= C + BE - AE^2 - AV \end{aligned}$$

$\bar{\varphi}$は序数であるからCはあってもなくても同じである。

$$\bar{\varphi} = BE - AE^2 - AV$$

また,同様に,右辺をBで除したものを$\bar{\varphi}$として使用してもよい。

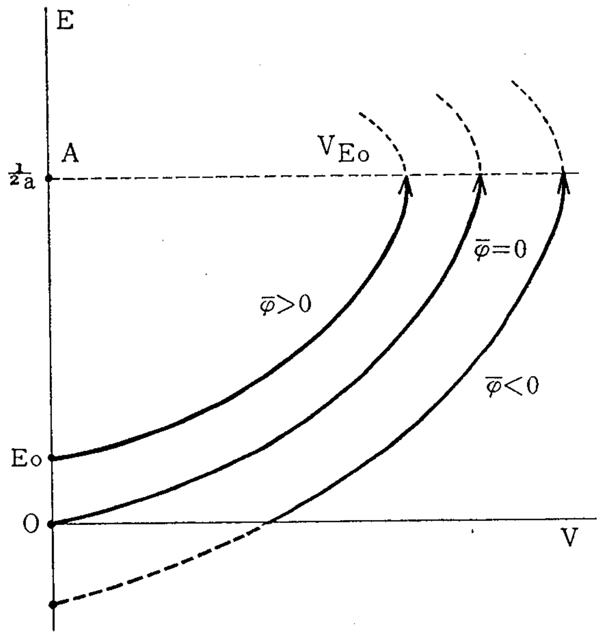
$$\bar{\varphi} = E - \frac{A}{B} E^2 - \frac{A}{B} V$$

このA/Bをaにおきかえることにすれば(4.8)式になる。したがって, $\alpha(x) = x - ax^2$ を代入した上例がかなり一般的なことが了解されよう。

横軸にV, 縦軸にEをとれば,

$$V = -E^2 + \frac{1}{a} E - \frac{1}{a}$$

であるから，$E<\frac{1}{2a}$ の範囲で，**第10図**のようになる。



第 10 図

無差別曲線がE軸を切る切片の値を E_0 とすると，

$$\bar{\varphi}=E_0-aE_0^2$$

かつ，

$$\frac{d}{dE_0}\bar{\varphi}=1-2aE_0>0$$

したがって，$E=0$, $V=0$ を通るものは $\bar{\varphi}=0$；$E>0$, $V=0$ を通るものは $\bar{\varphi}>0$；$E<0$, $V=0$ を通るものは $\bar{\varphi}<0$ になる。かつ，E_0 が $\frac{1}{2a}$ に近づくにつれて，$\bar{\varphi}$ は大きくなる。$\bar{\varphi}$ の上限は $\frac{1}{4a}$ であり，$\bar{\varphi}=\frac{1}{4a}$ は，$E=\frac{1}{2a}$, $V=0$ の点にほかならない。

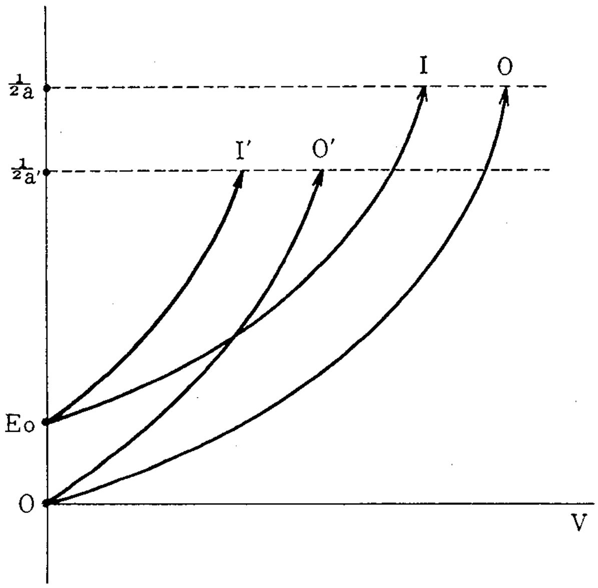
また，

$$V=-\left\{E-\frac{1}{2a}\right\}^2-\frac{\bar{\varphi}}{a}+\frac{1}{4a^2}$$

したがって，E_0 を通る無差別曲線にとってVの最大値 AV_{E_0} は，

$$\frac{1}{4a^2}-\frac{1}{a}(E_0-aE_0{}^2)=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{4a}-E_0\right)+E_0{}^2$$

したがって，a が大きくなれば，同じ E_0 に対して AV_{E_0} は小さくなり，つまり，曲線は急傾斜になる。a が小さくなればその反対である。a はデシジョン・パラメーターである。a が大きくなれば，**第11図**の，0, I から，0′, I′ へといったような変化がおきる。その際，a が大きくなったときには E の上限も $\frac{1}{2a'}$ といった形で小さくなること，また $\overline{\varphi}$ についても，その順序は変らないが値が変ることに留意せねばならない。



第 11 図

a は，デシジョン・ルールをあらわすパラメーターである。このパラメーターがあたえられているとき，上述の E_0 の値が，さきに (4.1) でのべた x_j であり，また，$f_j(x)$ がある期待値と分散をもつとき，

$$E_0-aE_0{}^2=E-aE^2-aV$$

は，前述の範囲で，E_0 の値を一義的に決定する φ の役割を果すのである。

V. 構　　成

われわれが第III節で求めたものは，E-V 平面に描かれていない。m-r 平

面である。したがって，これに適合するように(4.8)を変えねばならない。第II節で設定したように，企業者が，モードと範囲のみに注目し，かつ確率分布がほぼ対称的であるとみることは，その企業者がほぼ正規分布に近い分布を主観的確率分布として設定しているのに近いことを意味している。

もし，分布をほぼ正規分布に近いと考えるなら，$n(m, \sigma)$ において，偏差の絶対値が標準偏差の2倍より小さい確率は，0.9544 であるから，近似的に，

$$\sigma=\sqrt{V}\fallingdotseq\frac{r}{2}$$

とおいてよい。ただし，r は，第 II, III 節でのべた実際的範囲（片側の長さ）である。したがって，近似的に，

$$V\fallingdotseq\frac{1}{4}r^2$$

$$E\fallingdotseq m$$

でおきかえても，ほとんど実際的には支障はない。（r は，両裾の小さな部分を切り捨てていることに注意）。($m\geqq0$, $r\geqq0$)。

したがって，(4.8) 式は，

$$(5.1)\qquad \bar{\varphi}=m-am^2-\frac{1}{4}ar^2$$

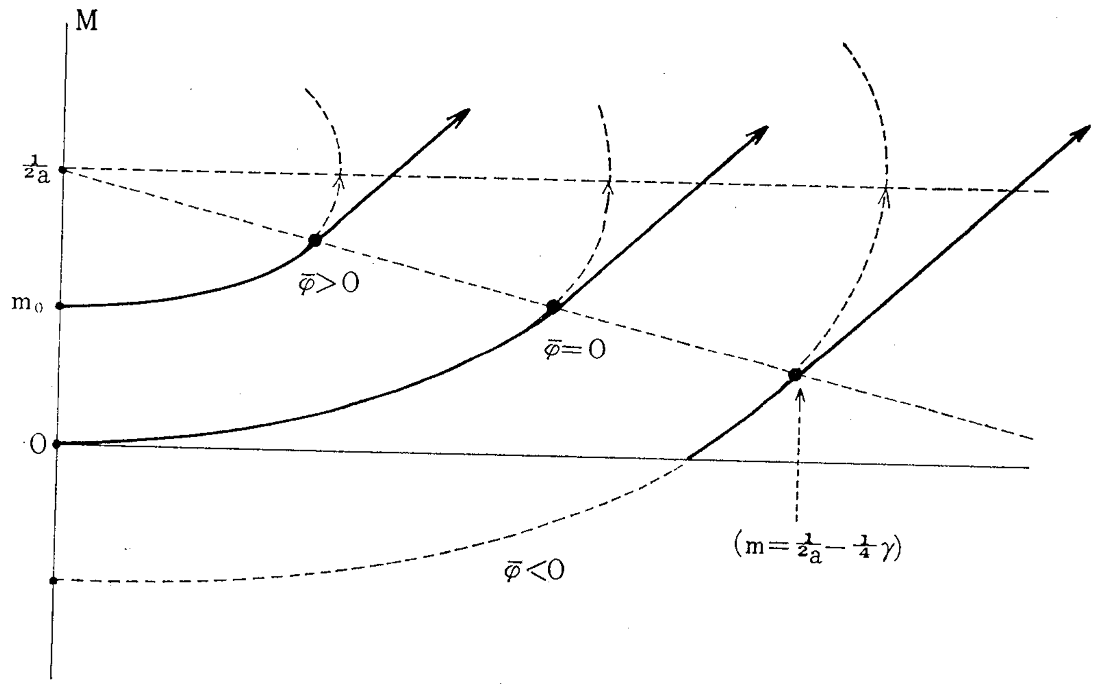
になる。これを第III節で求めたリスク評価関数の曲線部分の式として採用することができる。

変形して，

$$\frac{\left(m-\dfrac{1}{2a}\right)^2}{\dfrac{1-4a\bar{\varphi}}{4a^2}}+\frac{r^2}{\dfrac{1-4a\bar{\varphi}}{a^2}}=1$$

したがって，その図は**第12図**のように描かれる。

曲線部分は，まず，$0\leqq m\leqq\dfrac{1}{2a}$ でのみ有効である。R 軸に沿う長径は



第 12 図

M軸に沿う短径の2倍の長さである。曲線がM軸を切る切片のM座標を m_0 とすると，$0<m_0<\dfrac{1}{2a}$ では $\bar{\varphi}>0$；$m_0=0$ では $\bar{\varphi}=0$；延長して $m_0<0$ になる部分では $\bar{\varphi}<0$ である。また，$m_0<\dfrac{1}{2a}$ では，

$$\bar{\varphi}=m_0-am_0^2$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dm_0}\bar{\varphi}=1-2am_0>0$$

故に m_0 が $\dfrac{1}{2a}$ に近づくにつれて $\bar{\varphi}$ は増大し，$m_0=\dfrac{1}{2a}$ で $\bar{\varphi}$ は最大になり，$\bar{\varphi}_{max}=\dfrac{1}{4a}$。

なお，ある任意の $\bar{\varphi}$ 曲線について，$0<m<\dfrac{1}{2a}$ では，

$$\frac{d^2}{dr^2}m=\frac{a}{2-4am}>0$$

無差別曲線の勾配は，下方に凸に漸増するが，さきの第Ⅲ節での設定により，その勾配は $\dfrac{d}{dr}m=1$ よりは大きくはならない。

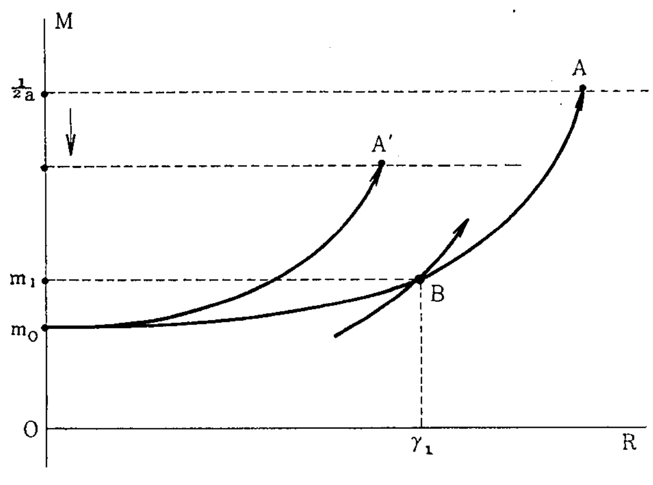
各曲線は，

$$m=\frac{1}{2a}-\frac{1}{4}r$$

なる直線との交点で接線勾配1をもつ。したがって無差別曲線はその直線との交点から以後は45°線になる。

この場合，われわれは関数式を第IV節のものから導出した関係上，$m \geqq 0$ のみでしかこの図表を使用しない。また，$\bar{\varphi}<0$ の曲線で $|\bar{\varphi}|$ が大きくなれば，曲線はほとんどが直線部分になる。しかし，第II節で設定されたような企業デシジョンにとって，$m<0$ のようなプログラムはもともと問題になることがほとんどないといってよい。むしろ，ヨリせまく考えると，$\bar{\varphi}<0$ の部分については，そのプログラムが $\bar{\varphi}<0$ に属することがわかれば，もう不採用ということで，その細かい詮索は不要とも考えられる。したがって実際的には $\bar{\varphi} \geqq 0$ の部分に入るプログラム間の順位づけだけが問題であり，$\bar{\varphi}<0$ については負値であるということで，それ以上の差別については無差別であると考えてもよいだろう。

さて，M軸上の任意の点 m_0 を通る楕円曲線の長径上の頂点の座標は，$m=\frac{1}{2a}$，$r=2\left(\frac{1}{2a}-m_0\right)$ である。したがって，a が大きくなれば，その m_0 を通る楕円曲線の新しい頂点は，**第13図**にしめすように，M席標，R座標ともヨリ小さくなる。$(A \to A')$。楕円曲線 A' は m_0 点でAに内接する。また，任意の点，$m=m_1$, $r=r_1$ を通る，上述楕円曲線への接線勾配は，

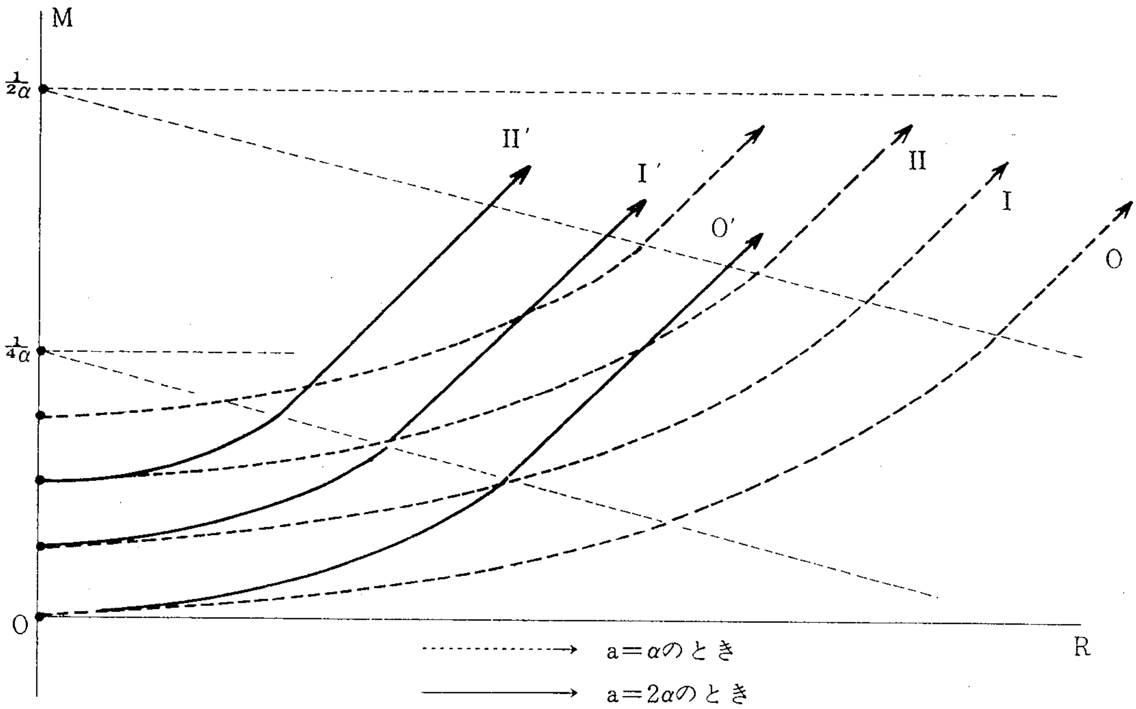


第 13 図

$$\frac{1}{4}r_1\left(\frac{1}{2a}-m_1\right)^{-1}$$

であるから，あたえられた r_1, m_1 について，この値は，$0<m_1<\frac{1}{2a}$ の範囲では，a が大きくなるとともに大きくなる。(第13図のB点参照)。

したがって，全般的結論として，無差別図表は**第14図**のような形になる。たとえば，a が2倍になると無差別図表，0, I，II，III，…… は無差別図表 0′, I′, II′, III′, …… といった形に変る。



第 14 図

(1) あるプログラム $(m-r, m, m+r)$ について，$a=\alpha$ のときに，そのプログラムが確実な収益 m_α 円と同置されていたとすれば，(すなわち上述のプログラム点を通る無差別曲線がM軸上の m_αなる値の点を通れば)，**この $m-m_\alpha$ が，上述のプログラムにおける r に対するリスク・プレミアム**である。

(2) a の増大は，あるプログラムにおける，そのリスク・プレミアムを増大させる。

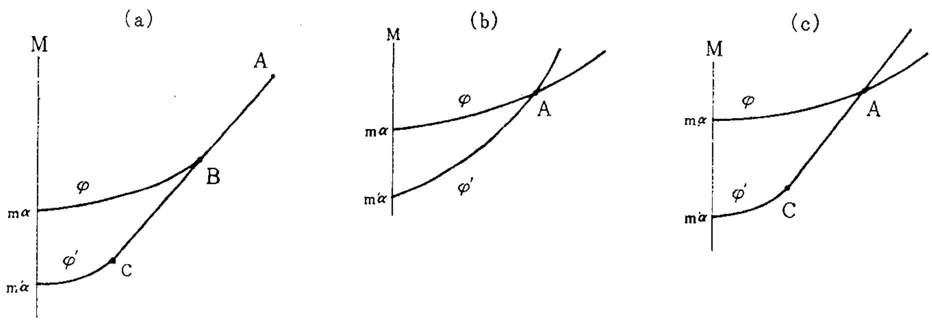
(3) 一般に，あるプログラム $(m-r, m, m+r)$ と，これに対して，m は

Δm 増大し r は Δr 増大したプログラム $(m+\Delta m-r-\Delta r,\ m+\Delta m,\ m+\Delta m+r+\Delta r)$ とが等しく選好されたとする。$(\Delta m, \Delta r>0)$

$$0<\frac{\Delta m}{\Delta r}\leqq 1$$

である。Δr を，ある単位増分とし，Δm をこれにみあう増分とした場合には，$\left(\frac{\Delta m}{\Delta r}\right)_{\Delta r=1}$ は，r の増大につれて増大する。

(4) あるプログラムについてのリスク・プレミアムが，a の増大とともに増大するあり方は，そのプログラム点Aが，はじめの無差別図表において半直線 $m=\frac{1}{2a}-\frac{1}{4}r$ の上またはその右半平面の中にあるときには**第15図(a)** のような形でおきる。点Aがその直線の左半平面の中にあるときには**第15図(b)** のようになる。φ' は新しく a が増大したときの無差別線。B，Cは接点部分。第15図(b) において，新しい無差別図表においてはAが半直線 $m=\frac{1}{2a}-\frac{1}{4}r$ の右半平面上に位置するとすれば，**第15図(c)** のような形になる。M, R の目盛りのとり方によって，ほとんどのプログラムがはじめ図表において $m=\frac{1}{2a}-\frac{1}{4}r$ の左半平面上に位置するようになることが充分にあり得るのであり，第15図(b), (c) のような形が一般的と考えてもよいだろう。なお，作図上の問題としては，第6図のような描き方をすれば，上述のような関係をヨリ明示的に図示することができよう。〔**5**, pp. 41～47参照〕*。



第 15 図

* したがって，筆者がさきに〔5，参照〕で述べたような問題は，第15図(b)(c)の場合に一般的にいえると同時に，第15図(a)のような場合にも，φ 線上で B よりも

M軸に近い点を B' とすれば，A の r 座標に相当するリスクを B' の r 座標に相当するリスクに縮少するリサーチ・コストに関して，同様にいわれ得るのである。

なお，a が変るにともない，M軸上の同一の点につらなる曲線の $\bar{\varphi}$ の絶対値は変るが，$\bar{\varphi}$ は序数であり，実際計算の上ではM軸上の m_α，m'_α 等の値が重要であり，$\bar{\varphi}$ 自体は媒介変数として消去され得る。

なお，ちなみに，確実な収益10と等しく選好されるプログラム例を，$a=1/40$ の際と，$a=1/80$ の際とで例示すれば別表**第I表**のようになる。

そして，$a=1/80$ のときに，確実な収益10と同等に選好された，(−10, 12, 34)，(−13, 13, 39) は，$a=1/40$ のもとではそれぞれ，確実な収益約6.5円，約5円に評価替えされることになる。つまり，リスク・プレミ

第I表 等選好プログラムの例

$a=\frac{1}{80}$ ($\bar{\varphi}=8.75$)

下限	モード	上限	m	r
10	10	10	10	0
−4	11	26	11	15
−10	12	34	12	22
−13	13	39	13	26
−16	14	44	14	30
−18	15	48	15	33
−20	16	52	16	36
−25	20	65	20	45
−27	27*	81	27	54
−27	40	107	40	67

$a=\frac{1}{40}$ ($\bar{\varphi}=7.75$)

下限	モード	上限	m	r
10	10	10	10	0
5	11	17	11	6
2	12	22	12	10
0	13	26	13	13
−1	14*	29	14	15
−1	15	31	15	16
−1	16*	33	16	17
−1	20	41	20	21
−1	27	55	27	28
−1	40	81	40	41

注 1. *印からは下限のみに注目するようになる。つまり下限の減少を拒否。

2. $a=\frac{1}{40}$ では *印は $m=16$ であるが，近似計算のため結果として $m=14$ のようになる。

3. $\bar{\varphi}$ は参考までに付したもの。

第II表　リスク・プレミアムの変化

$a=\frac{1}{80}$　$(\bar{\varphi}=8.75)$

等選好プログラム例			リスク・プレミアム
下限	モード	上限	
10	10	10	
−10	12	34	12−10＝2
−13	13	29	13−10＝3

$a=\frac{1}{40}$　$(\bar{\varphi}=5.4)$

等選好プログラム例			リスク・プレミアム
下限	モード	上限	
6.5	6.5	6.5	
−10	12	34	12−6.5＝5.5

$a=\frac{1}{40}$　$(\bar{\varphi}=4.53)$

等選好プログラム例			リスク・プレミアム
下限	モード	上限	
5	5	5	
−13	13	39	13−5＝8

アムは前者において2円から5.5円に，後者において3円から8円に上昇することとなるのである(**第Ⅱ表**)。

ここで，トリビアルではあるが次のことを付記しよう。

たとえば，$a=1/8\times10^{-n}$ にすると，$\bar{\varphi}=0.875\times10^{n}$ になり，また各プログラムの下限，モード，上限の値は，10^{n-1} 倍されて $a=1/80$ の表がそのまま適用されるような関連にあるのはいうまでもない。したがって，かなり左下方の部分でかなりのものが扱えるのである。

ここで，根本的に注意されるべきことは，次のことである。

第Ⅰ表における $a=1/80$ のあり方の方がヨリ合理的であるか，$a=1/40$ の方がヨリ合理的であるか，を問うことは意味をもたないということである。いずれも等しく合理的であり，ただ前者はヨリ risk-taking 的であり後者はヨリ慎重であるというにすぎない。ただ，それぞれの選好の推移のあり方において，**別表のいずれもが，近似的に，第Ⅳ節でみたような一定の合理的ルールによって裏付けられる性格をもっているということが重要なのである。**

したがってまた，つぎのことも留意されねばならない。

パラメーター a のあり方によって，上述の無差別図表はさまざまであり得るが，それは，各デシジョン・メーカーにおける恣意な主観的あり方の無限定に多様なものをそのまま表現しようとするものではない。もし，デシジョン・メーカーの選択がなんらかの合理性に裏づけられようとするなら，**そのあり方はパラメーターによって多様ではあるが，そのそれぞれは上述の一定の形態にならざるを得ないという場合の限定をしめす**ものとして現われているのである。このような限定それ自体についてはなにも，特異なことはない。もともと，第Ⅲ節でみたような多くの条件そのものがすでにそのような限定なのである。それは，ランゲのいう，行動の合理的規則性をしめすものとしてのルールにほかならない。たとえば，第Ⅳ節の(4.0)式でしめした選好や，第Ⅲ節(3.1)式でしめした選好の合理性は，な

んら主観的なものではなくて，行動の客観的連関の中で人間がある目的を達成しようとする際に，好むと好まざるとにかかわらず要請される方法論的合理性として要求される行動のルールにほかならない。上述の，リスク評価関数も，そのデシジョン・パラメーターによって多様なあり方があり得るにせよ，それは，人間の行動の合理性をみとめるなら，ある一定の限定の中にあるのである。

VI. 補　　説

ただ，われわれは，リスク評価関数のプラキシオロジカルな合理的あり方を，モード m と範囲 r でしめすとき，a をパラメーターとして，

$$(5.0) \qquad \bar{\varphi}=m-am^2-\frac{1}{4}ar^2$$

なる形状でのみしめすのは，ややせまい，といわねばなるまい。上述の $\bar{\varphi}$ は，合理的ルールのかなり一般的な一つである，というにすぎない。

このほか，つぎのものが考えられる。

たとえば(4.8)式で，

$$E \fallingdotseq m \ , \quad \sqrt{V} \fallingdotseq r$$

におきかえると，

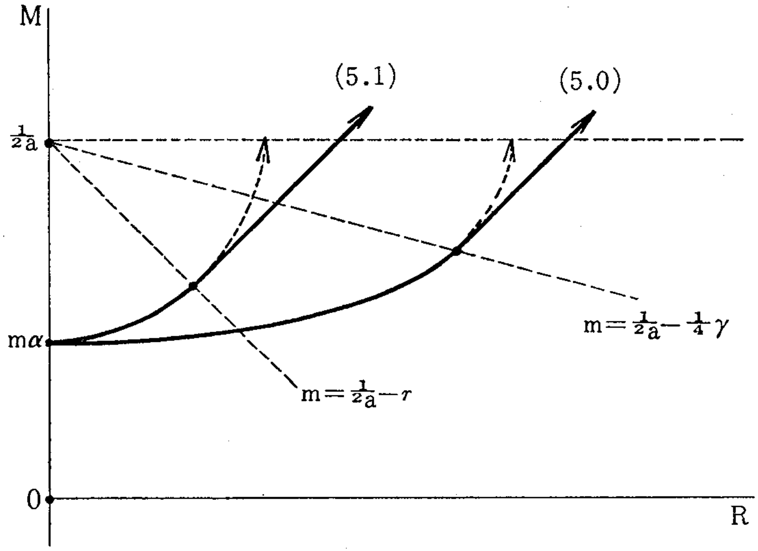
$$(5.1) \qquad \bar{\varphi}=m-am^2-ar^2$$

これは，

$$\left(m-\frac{1}{2a}\right)^2+r^2=\frac{1-4a\bar{\varphi}}{4a^2}$$

これは，M 軸上で $m=1/2a$ の点を中心とした同心円であり，楕円を M 軸方向に1/2だけ縮少したもの，つまり，さきの楕円曲線の補助円と同型である。$\bar{\varphi} \leqq \frac{1}{4a}$ でこれを無差別曲線として採用し，中心から勾配 $-\frac{1}{4}$ の半直線との交点で $\frac{dm}{dr}=1$ の45°線に変える。

(5.0)から(5.1)への変化は**第16図**のようになる。この場合，問題はつぎのように説明されよう。



第 16 図

$$\sqrt{V}=\sigma\fallingdotseq r$$

これは，確率ほぼ 0.7 で，偏差が σ 以内に収まることで σ を r におきかえたことになる。

さきの (5.0) 型は，確率ほぼ 1 で，r は 2σ をカバーし，つまり r のうちにほぼ偏差の絶対値が収まるだろうと考えた。これにたいして，(5.1) では，r は実際偏差をその枠に収めきれず，0.7 ぐらいの確率でもってしか，実際偏差は r の中に収まらないと考えていることになるのである。すなわち，(5.1) 型を採用しているということは，

$$(m-r,\ m,\ m+r)$$

にたいして，実は，下限は $m-r$ よりさらに小さいことや，上限が $m+r$ よりさらに大きいことが確率ほぼ 0.3 であり得るという風に考え，〝r〟という不確実性の度合の目安を，さらに全般的にヨリ大きいことがあり得ると想定しつつも，一応目安としておいている，というあり方といえる。したがって，(5.0) 型のデシジョン・メーカーの際に，みずからが採用している〝r〟が，実際的範囲としてあまり両裾を切り捨てていないと考えているのにたいして，(5.1) 型は，両裾をやや過大に切り捨てではいないかという配慮をしているのであり，(5.1) 型の方が，ヨリ慎重な型として現

われることになるのである。

このような意味から，われわれは，ある値 a について，

$$(5.2)\qquad \bar{\varphi}=m-am^2-\frac{a}{b}r^2$$

を設定して，b を，

$$1\leqq b\leqq 4$$

の間で移動させることにより，無差別図表の推移を考え得よう。

同時にまた，一般に，

$$\bar{\varphi}=m-am^2-ar^2$$

においても，前の楕円の場合と同じく a，の増大により前のケースにおける a の増大と似た現象を見ることができよう。

ここで，われわれは，この二つの方法を無限定に混用はできない。いいかえると，(5.2) において，a，b の両パラメーターを同時に動かすことはわれわれがこの関数式を，第Ⅳ節の推論を経て (4.8) 式から導出したことから考えて，なんの合理性をも持たない。むしろ，その際には，ある a と $b=4$ から出発して，b を 4 から 1 へ移動したのち，$b=1$ のもとで a が増大しはじめる経路か，または，$b=4$ のまま a が増大をつづけ，ある a に達したところで，その a の値の下で b の 4 から 1 への移動が始まるような経路を考えた方がよいだろう。少なくとも，このような経路の導入によって，上述の無差別図表は，ヨリ一般性をもち得るだろう。

なお，ここで気のつくことは，(4.8) 式，(5.0) 式，(5.1) 式ともに，同じ r の値にたいして，$\dfrac{dm}{dr}$ または $\dfrac{dE}{dV}$ は，無差別曲線の $\bar{\varphi}$ が増大し，いいかえると m または E の増大とともに増大することである。これは，モードや期待値の絶対額が増大するにつれて，ヨリ慎重になるということに相応するもので，この意味からも，第Ⅳ節の冒頭の「*」の項で述べた曲線は採り得ないのである。

上述のほか，なんらかの合理性をもった無差別図表があり得るかも知れ

ない。ただ，筆者にとっては，この曲線の構成そのものが技術的に重要なのではない。くり返していうが，このような評価関数は，主観的な無差別曲線の形をとるのであるが，そのことは，単に恣意にあり得るということではなく，もし人間の行動の一定の方法論的合理性という基準に立つなら，その曲線は，たとえ多様であっても，なんらかの限定の中にあるだろうということが重要なのである。このことはさらに一般的な意義をもつが，今回は触れない。

文　献

〔1〕 Bernoulli, D., "Exposition of a New Theory of Measurement of Risk," *Econometrica*, 1954, pp. 23～36. (Translation of a paper, originally published in Latin in St. Petersburg in 1738.)

〔2〕 Borch, K. H., *The Economics of Uncertainty*, 1968, Princeton.

〔2a〕 Knight, F. H., *Risk, Uncertainty and Profit*, Hart, Schraffner, and Marks, 1921.

〔3〕 Lange, O., "A Note on Innovations," *The Review of Economic Statistics*, Vol. 25, Feb. 1933, pp. 19～25.

〔4〕 *Idem.*, *Price Flexibility and Employment*, 1944, The Principia Press. (安井琢磨ほか訳「価格伸縮性と雇用」東洋経済新報社，1953)

〔5〕 飯尾　要，"「市場」と情報"，「桃山学院大学経済学論集」第9巻第2号，29～62ページ。

〔6〕 飯尾　要，「市場と制御の経済理論」日本評論社，1970年5月刊。(予定)